КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ, В КОТОРЫХ НОРМАЛИЗАТОР СИЛОВСКОЙ s–ПОДГРУППЫ ИМЕЕТ БИПРИМАРНЫЙ ИНДЕКС

Э.М. Пальчик, С.Ю. Башун

Полоцкий государственный университет

Блохина 29, 211440 Новополоцк, Витебская обл., Беларусь bashunsviat@mail.ru

Обозначения и терминология стандартные [1, 2].

Бипримарное число i — число вида $i = t^a \cdot r^b$, $a > 0$, $b > 0$, t и r — различные простые числа. Пусть $\mathfrak{M}$ обозначает множество следующих групп G с указанными свойствами их разрешимых максимальных подгрупп $M < \cdot\, G$ индекса i (всюду ниже $k \geq 0$):

$\mathfrak{M}(1)$ $L_2(q)$, $q = 2^{2^k}$, $M \cong D_{2(q-1)}$, $i = 2^{2^k-1}(q+1)$, $q+1$ — простое число Ферма;

$\mathfrak{M}(2)$ $L_2(q)$, $q = 2^f$, $M \cong D_{2(q+1)}$, $i = 2^{f-1}(q-1)$, $q-1$ — простое число Мерсенна;

$\mathfrak{M}(3)$ $L_2(q)$, $q = p^{2^k}$, $M \cong D_{q-1}$, $i = q(q+1)/2$, $p > 2$, $(q+1)/2$ — степень простого числа;

$\mathfrak{M}(4)$ $L_2(p)$, $M \cong D_{p+1}$, $i = p \cdot (p-1)/2$, $(p-1)/2$ — степень простого числа, $p > 2$;

$\mathfrak{M}(5)$ $L_2(q)$, $q = p^f$, $p \geq 2$, $M = N_G(G_p)$, $i = q+1$, $f = 2^k \cdot f_0$, $f_0 = 1$ или простое число.

В работе [3] описаны неабелевы композиционные факторы конечных групп, у которых нормализатор силовской s–подгруппы имеет примарный индекс ($i = t^a$).

В этой заметке доказывается похожий результат.

Теорема. *Пусть s — простое число и нормализатор N силовской s–подгруппы в конечной простой группе G имеет бипримарный индекс $i = t^a \cdot r^b$. Тогда*

(1) $s = 2$, $G \in \{A_6; L_2(q) \in \mathfrak{M}(5)$ с $p = 2$; $L_2(11)$, $N \cong A_4$; $L_2(13)$, $N \cong A_4$; $L_3(3)$; $L_3(8)$, $i = 3^2 \cdot 73$; $U_3(3)$, $i = 3^3 \cdot 13$; $U_3(8)$, $i = 3^3 \cdot 19$; $PSp_4(3)$, $i = 3^3 \cdot 5$; $Sz(8)$, $i = 5 \cdot 13$; $Sz(32)$, $i = 5^2 \cdot 41\}$;

(2) $s = 3$, $G \in \{A_5$; A_6; M_{11}, $N \cong E_9.QD_{16}$; $L_2(q) \in \mathfrak{M}(1)$, $3|(q-1)$, $N = M$; $L_2(q) \in \mathfrak{M}(2)$, $3|(q+1)$, $N = M$; $L_2(q) \in \mathfrak{M}(3)$, $3|(q-1)$, $N = M$; $L_2(q) \in \mathfrak{M}(4)$, $3|(p+1)$, $N = M$; $L_2(q) \in \mathfrak{M}(5)$ с $p = 3$, $M = N$; $PSp_4(3)$, $i = 2^5 \cdot 5$; $U_3(3)$, $N = G_3 \rtimes Z_8$; $L_3(3)$, $i = 2^2 \cdot 13\}$;

(3) $s > 3$, $G \in \{A_5$, $s = 5$; A_6, $s = 5$; M_{11}, $s = 11$; M_{12}, $s = 11$; $L_3(3)$, $s = 13$; $L_3(5)$, $s = 31$; $U_3(3)$, $s = 7$; $U_3(4)$, $s = 5, 13$; $L_2(q) \in \mathfrak{M}(1)$, $s|(q-1)$, $N = M$; $L_2(q) \in \mathfrak{M}(2)$, $s|(q+1)$, $N = M$; $L_2(q) \in \mathfrak{M}(3)$, $s|(q-1)$, $N = M$; $L_2(q) \in \mathfrak{M}(4)$, $s|(p+1)$, $N = M$; $L_2(q) \in \mathfrak{M}(5)$, $N = M$, $U_3(7)$, $s = 43$, $i = 2^7 \cdot 7^3$; $U_5(2)$, $s = 11$, $i = 2^{10} \cdot 3^5$; $PSp_4(3)$, $s = 5\}$.

Доказательство. Так как N есть s–разрешимая подгруппа бипримарного индекса в простой группе G, то из лемм 3.1, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 5.1 в [4] непосредственно видно какие группы G имеют s–разрешимые подгруппы K бипримарного индекса, $s \in \pi(K)$. В этих леммах указано и строение таких подгрупп. Среди таких подгрупп нормализаторами силовских s–подгрупп являются те, которые указаны в заключении теоремы. Теорема доказана.

Литература

1. Huppert B. *Endliche Gruppen*, I. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

2. Горенстейн Д. *Конечные простые группы. Введение в их классификацию.* М.: Мир, 1985.

3. Кондратьев А. С., Го В. *Конечные группы, в которых нормализаторы силовских 3–подгрупп имеют нечетные или примарные индексы* // Сиб. матем.ж. 2009. Т. 50. №2. С. 344–349.

4. Li C. H., Li X. *On permutation groups of degree a product of two prime-powers* // Commun. Algebra. 2014. Vol. 42. P. 4722–4743.